

Télécom Physique Strasbourg
FIP– 2^{ème} année

Identification des systèmes dynamiques

Professeur Michel de Mathelin

Cours intégré : 14 h

Programme du cours d'identification

- Chapitre I: Introduction
 - Définitions
 - Objectifs de l'identification
- Chapitre II: Structures de modèle
 - Modèles de connaissance et modèles de comportement
 - Modèles linéaires et non linéaires
 - Modèle à temps continu et à temps discret
 - Principe de parcimonie
 - Identifiabilité
 - Modèles déterministes et modèles stochastiques
- Chapitre III: Calcul du modèle
 - Méthodes graphiques
 - Algorithme des moindres carrés pondérés
 - Algorithme des moindres carrés récursifs
 - Méthode des moindres carrés étendus

Programme du cours d'identification (suite)

- Chapitre III: Calcul du modèle (suite)
 - Méthodes des moindres carrés généralisés
 - Méthode des variables instrumentales
 - Méthodes générales d'optimisation
- Chapitre IV: Mise en œuvre et validation
 - Choix des signaux d'entrées
 - Echantillonnage
 - Prétraitement des données
 - Calcul du modèle
 - Validation
 - Etude de cas

Bibliographie – ouvrages en français

- P. Borne et al. [Modélisation et identification des processus.](#)
Technip, Paris, 1993.
- P. Borne et al. [Analyse et régulation des processus industriels. Tome 1. Régulation continue.](#)
Technip, Paris, 1993.
- J.-M. Flaus. [La régulation industrielle.](#)
Hermès, Paris, 1994.
- I. Landau. [Identification et commande des systèmes.](#)
Hermès, Paris, 1995.
- I. Landau. [Identification des systèmes.](#)
Hermès, Paris, 1998.
- R. Longchamp. [Commande numérique de systèmes dynamiques.](#)
Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1995.
- L. Povy. [Identification des processus.](#)
Dunod, Paris, 1975.

Bibliographie – ouvrages en français (suite)

- J. Richalet. [Pratique de l'identification](#).
Hermes, Paris, 1991.
- M. Rivoire et J.-L. Ferrier. [Cours d'automatique. Tome 3. Commande par ordinateur - Identification](#).
Eyrolles, Paris, 1997.
- E. Walter et L. Pronzato. [Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales](#).
Masson, Paris, 1994.

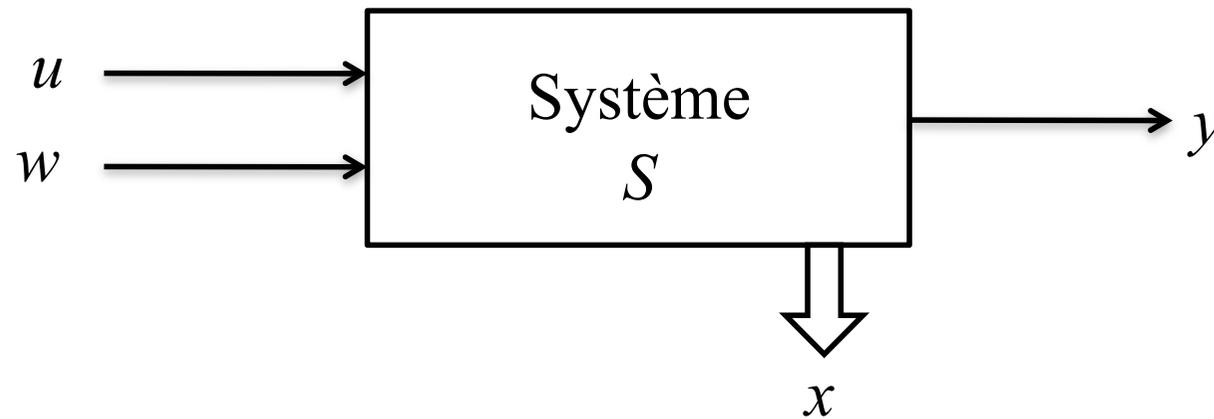
Bibliographie – ouvrages en anglais

- T. Bohlin. [Interactive system identification: prospects and pitfalls.](#)
Springer Verlag, Berlin, 1991.
- R. Fletcher. [Practical methods of optimization.](#)
John Wiley & Sons, New-York, 1987.
- P. Gill, W. Murray et M. Wright. [Practical optimization.](#)
Academic Press, New-York, 1981.
- R. Johansson. [System modelling and identification.](#)
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.
- L. Ljung. [System identification: Theory for the user.](#)
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- L. Ljung. [System identification: Matlab Toolbox user's guide.](#)
The Mathwork Inc., Natick, 1995.
- W. Press et al. [Numerical recipes in C, the art of scientific computing.](#)
Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- T. Soderström & P. Stoica. [System identification.](#)
Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.

I. INTRODUCTION

I.1 Définitions (1)

- I.1.1 Système



u = entrées

y = sorties

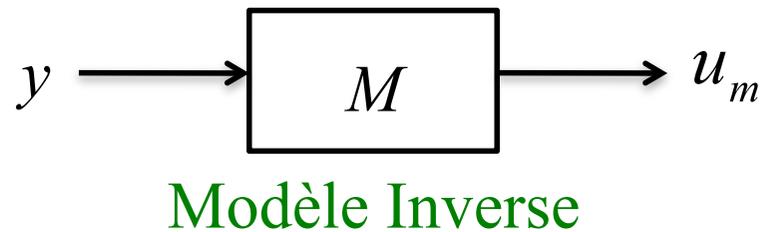
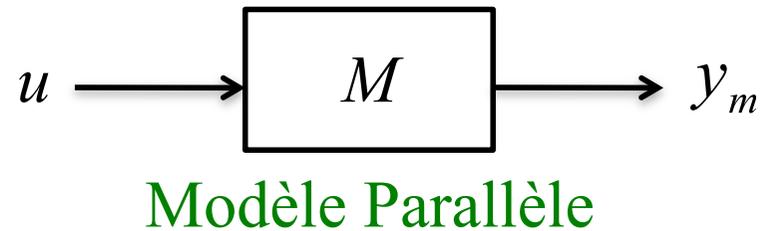
w = bruit + perturbation

x = états

I. INTRODUCTION

I.1 Définitions (2)

- I.1.2 Modèle



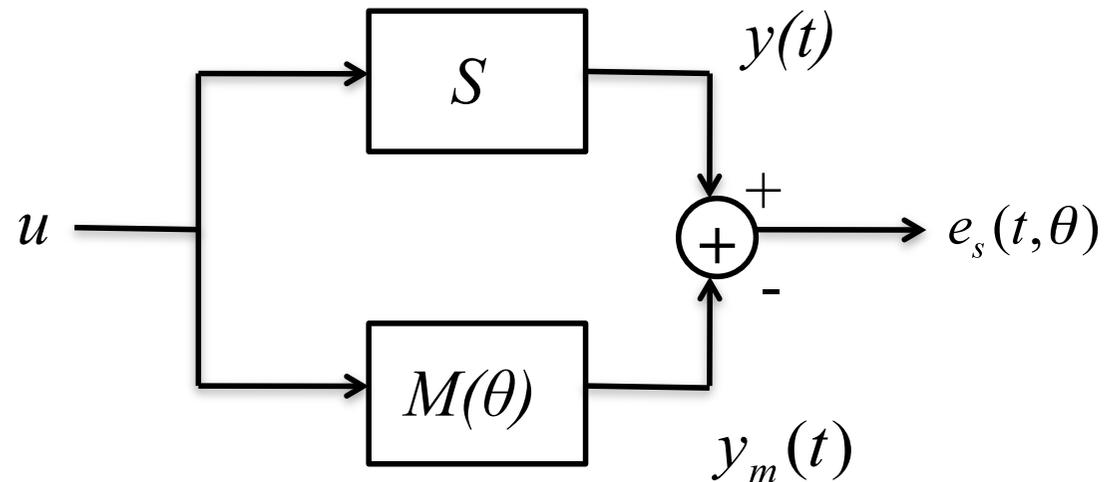
Paramètres : θ

⇒ Modèle paramétrique : $M(\theta)$
Structure de modèle : $M(\cdot)$

I. INTRODUCTION

I.1 Définitions (3)

- I.1.3 Critère



Erreur de sortie pour un modèle parallèle

$e_s(t, \theta) = y(t) - y_m(t, \theta)$ aussi proche de zéro que possible

Critère $J(\cdot)$ à minimiser:

$M_1(\theta_1)$ meilleur que $M_2(\theta_2)$ au sens du critère J

$$\Leftrightarrow J(M_1(\theta_1)) < J(M_2(\theta_2))$$

I. INTRODUCTION

I.2 Procédure d'identification

1. Recueil des données expérimentales
 - Sélection des signaux d'entrée
 - Conditionnement des données
2. Sélection de la structure de modèle
 - Plusieurs modèles possibles
3. Choix du critère
 - Sélection de J
4. Calcul du meilleur θ
 - Choisir un algorithme d'optimisation
5. Validation
 - Test pouvant invalider
 - \Rightarrow Modèle acceptable

II. STRUCTURE DE MODELES

II.1 Modèles de connaissance et modèles de comportement

Modèles de connaissance (boîte blanche)

Modèles de comportement (boîte noir)

	Modèles de connaissance	Modèles de comportement
Paramètre	Sens concret	Pas de sens concret
Simulation	Délicate	Facile
Information à priori	Prise en compte	Négligée
Domaine de validité	Etendu	Restreint

Modèles intermédiaires (boîte grise)

II. STRUCTURE DE MODELES

II.2 Modèles linéaires et modèles nonlinéaires

2.2.1 Modèle linéaire par rapport aux entrées (LRE)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$$

$$y_m(t, \theta, \alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha y_m(t, \theta, u_1) + \beta y_m(t, \theta, u_2)$$

2.2.2 Modèle linéaire par rapport aux paramètres (LRP)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$$

$$y_m(t, \alpha \theta_1 + \beta \theta_2, u) = \alpha y_m(t, \theta_1, u) + \beta y_m(t, \theta_2, u)$$

$$\Leftrightarrow y_m(t, \theta, u) = \varphi^T(t, u) \theta$$

 régresseur

2.2.3 Modèle affine par rapport aux paramètre (LAP)

$$y_m(t, \theta, u) = y_{m_1}(t, u) + y_{m_2}(t, u, \theta)$$

Avec y_{m_2} LRP

$$\Leftrightarrow (y_m - y_{m_1}) \text{ LRP}$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.3 Modèles à temps continu et modèles à temps discret

	Modèles continus	Modèles discrets
Paramètres	Indépendants des instants de mesure	Fonctions de la période d'échantillonnage
Simulation	Délicate	Facile
Information à priori	utilisable	inutilisable
Instant de mesure	quelconques	imposés

II. STRUCTURE DE MODELES

II.4 Principe de parcimonie

$$M_1(\theta_1) = \frac{b_1}{1 + a_1 s}$$

$$M_2(\theta_2) = \frac{b_1}{1 + a_1 s + a_2 s^2}$$

$$\Rightarrow M_1(\theta_1) \subset M_2(\theta_2)$$

Pour un jeu de données particulier $M_2(\theta_2)$ meilleur que $M_1(\theta_1)$

Mais pouvoir prédictif de $M_1(\theta_1)$ peut être meilleur que $M_2(\theta_2)$

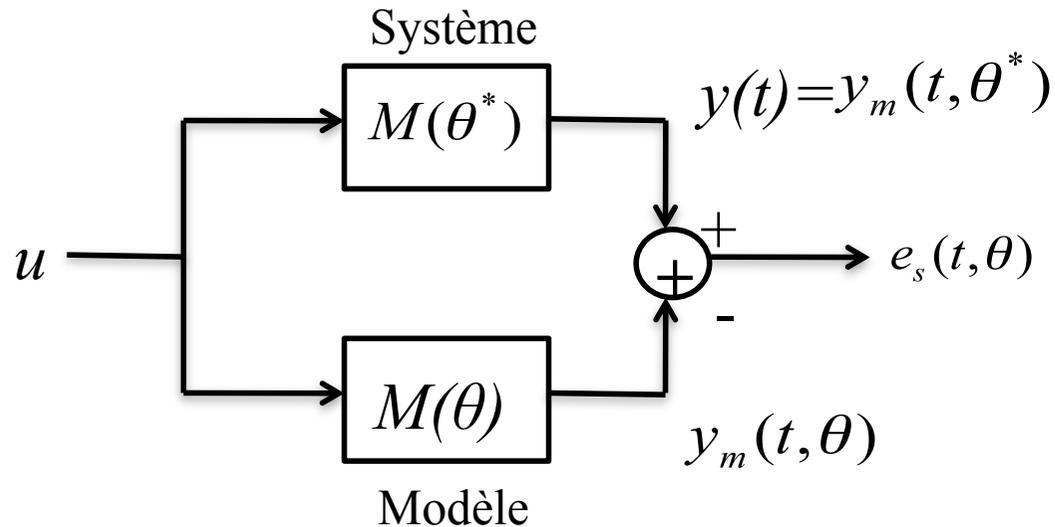
⇒ **Parcimonie** « le moins de paramètres possibles »

- Tester le pouvoir prédictif
- Pénaliser la complexité

II. STRUCTURE DE MODELES

II.5 Identifiabilité

- * Absence de bruit
- * Système et modèle de même structure



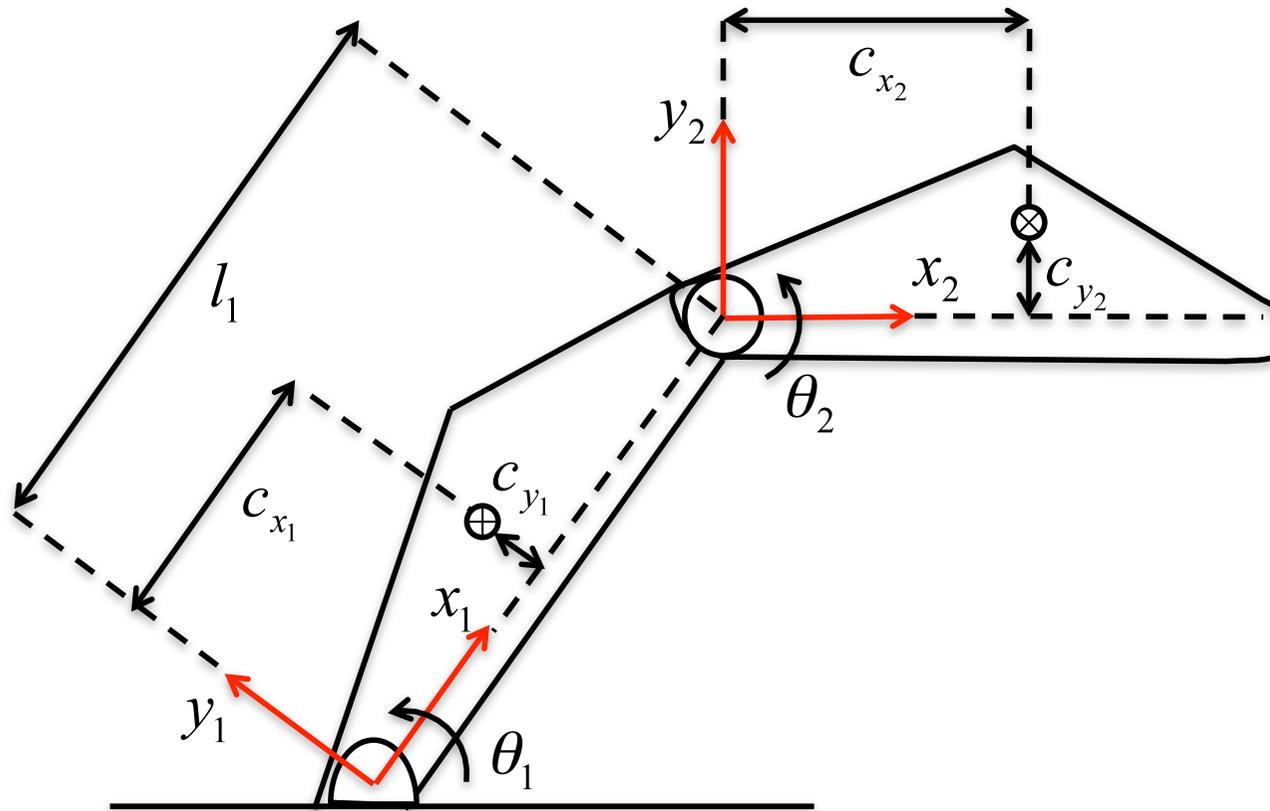
Soit $\theta \mid e_s(t, \theta) = 0 \quad \forall u \Leftrightarrow M(\theta) = M(\theta^*)$

- A. θ globalement identifiable si $\forall \theta$
 $M(\theta) = M(\theta^*) \Rightarrow \theta = \theta^*$
- B. θ localement identifiable si $\forall \theta \in V(\theta^*)$
 $M(\theta) = M(\theta^*) \Rightarrow \theta = \theta^*$
- C. θ non identifiable si \exists une infinité de $\theta \mid M(\theta) = M(\theta^*)$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.6 Exemple (1)

Bras manipulateur à 2 degrés de liberté, rigide et sous frottements



II. STRUCTURE DE MODELES

II.6 Exemple (2)

Modèle de connaissance:

Modèle dynamique

Paramètres: - Matrices d'inertie
aux centres de masse:

18 paramètres
différents

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx_1} & I_{xy_1} & I_{xz_1} \\ & I_{yy_1} & I_{yz_1} \\ & & I_{zz_1} \end{bmatrix} \\ I_2 \end{array} \right.$$

- Position des centres de masse: $\begin{cases} c_{x_1} & c_{y_1} \\ c_{x_2} & c_{y_2} \end{cases}$

- Masses: m_1 et m_2

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \ddot{\theta}_1 [I_{zz_1} + m_1(c_{x_1}^2 + c_{y_1}^2) + I_{zz_2} + m_2(c_{x_2}^2 + c_{y_2}^2) + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 (c_{x_2} \cos \theta_2 - c_{y_2} \sin \theta_2)] \\ & + \ddot{\theta}_2 [I_{zz_2} + m_2(c_{x_2}^2 + c_{y_2}^2) + m_2 l_1 (c_{x_2} \cos \theta_2 - c_{y_2} \sin \theta_2)] \\ & - m_2 l_1 (c_{x_2} \sin \theta_2 + c_{y_2} \cos \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 l_1 (c_{x_2} \sin \theta_2 + c_{y_2} \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \ddot{\theta}_1 [I_{zz_2} + m_2(c_{x_2}^2 + c_{y_2}^2) + m_2 l_1 (c_{x_2} \cos \theta_2 - c_{y_2} \sin \theta_2)] + \ddot{\theta}_2 [I_{zz_2} + m_2(c_{x_2}^2 + c_{y_2}^2)] \\ & + m_2 l_1 (c_{x_2} \sin \theta_2 + c_{y_2} \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{aligned}$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.6 Exemple (3)

Modèle non LRP et non LRE ne contenant que 8 paramètres

Changement de variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{z_1} = I_{zz_1} + m_1(c_{x_1}^2 + c_{y_1}^2) \\ I_{z_2} = I_{zz_2} + m_2(c_{x_2}^2 + c_{y_2}^2) \\ m_{x_1} = m_1 c_{x_1} \\ m_{x_2} = m_2 c_{x_2} \\ m_{y_1} = m_1 c_{y_1} \\ m_{y_2} = m_2 c_{y_2} \end{array} \right. + m_1 \text{ et } m_2$$

⇒ **Modèle LRP**

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= I_{z_1} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + I_{z_2} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + m_{x_2} \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - l_1 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \\ l_1 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_1 + l_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \\ &+ m_{y_2} \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - l_1 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \\ -l_1 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_1 + l_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Seulement 5 paramètres dont uniquement 4 identifiables !

II. STRUCTURE DE MODELES

II.6 Exemple (4)

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = (I_{z_1} + m_2 l_1^2) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + I_{z_2} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + m_{x_2} \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - l_1 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \\ l_1 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_1 + l_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} \\ + m_{y_2} \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - l_1 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \\ -l_1 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_1 + l_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

Paramètres $\theta_p = \begin{bmatrix} I_{z_1} + m_2 l_1^2 \\ I_{z_2} \\ m_{x_2} \\ m_{y_2} \end{bmatrix}$ du modèle identifiable

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \varphi^T (\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2) \theta_p$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.6 Exemple (5)

Modèle LRP non LRE

$$\begin{array}{ccc} \text{Entrées} & \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} & \text{Sorties/mesures} & \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} & \text{états} & \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{En effet} \quad \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = M(\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + F(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$$

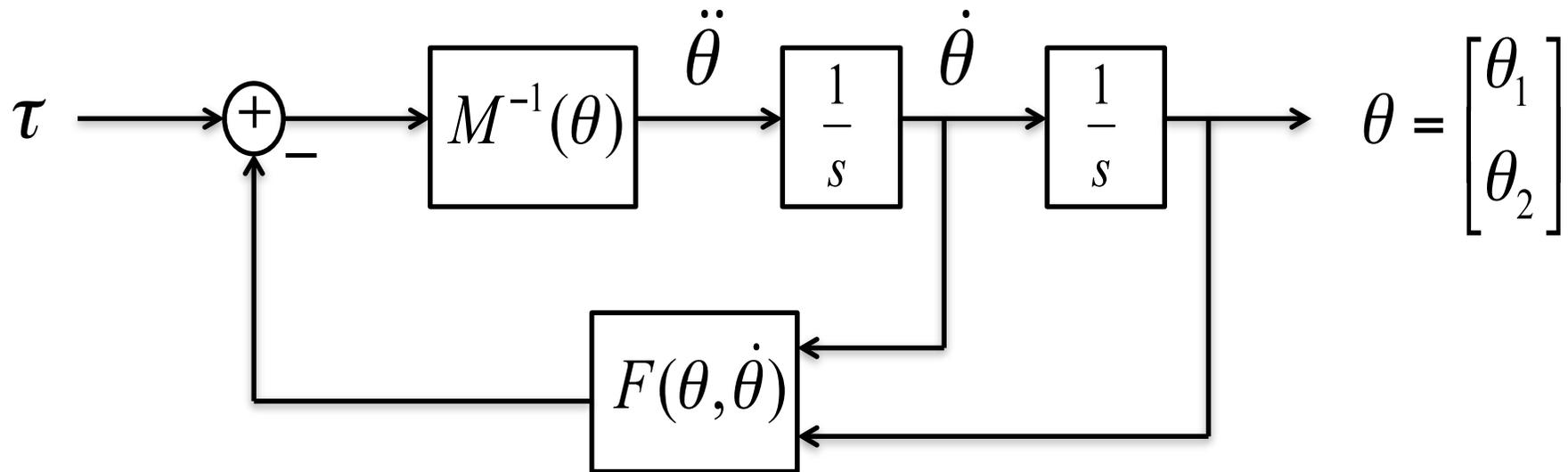
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = M^{-1}(\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} - M^{-1}(\theta_1, \theta_2) F(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$$

$$\text{avec} \quad M(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} I_{z_1} + m_2 l_1^2 + I_{z_2} + 2l_1(m_{x_2} \cos \theta_2 - m_{y_2} \sin \theta_2) & I_{z_2} + l_1(m_{x_2} \cos \theta_2 - m_{y_2} \sin \theta_2) \\ I_{z_2} + l_1(m_{x_2} \cos \theta_2 - m_{y_2} \sin \theta_2) & I_{z_2} \end{bmatrix}$$

$$F(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \begin{bmatrix} -l_1(m_{x_2} \sin \theta_2 + m_{y_2} \cos \theta_2)(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \\ l_1(m_{x_2} \sin \theta_2 + m_{y_2} \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.6 Exemple (6)



II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (1)

Ajout d'un modèle de bruit sous forme d'un processus stochastique

A. Modèle ARX (AutoRégressif à variable eXogène)

$$y[k] + a_1^* y[k-1] + \dots + a_{n_a}^* y[k-n_a] \\ = b_1^* u[k-n_r] + b_2^* u[k-n_r-1] + \dots + b_{n_b}^* u[k-n_b-n_r+1] + w[k]$$

Bruit blanc de moyenne nulle



$y[k] = y(kT)$ où $T =$ Période d'échantillonnage

* Signifie « vraie » valeur des paramètres

n_r (≥ 1 en général) Retard pur du système

$\{n_a, n_b, n_r\} =$ Structure de modèle

$\theta^* = \left[a_1^* \quad \dots \quad a_{n_a}^* \quad b_1^* \quad b_2^* \quad \dots \quad b_{n_b}^* \right]^T$ Vecteur des « vraies » valeurs du modèle

II. STRUCTURE DE MODELES

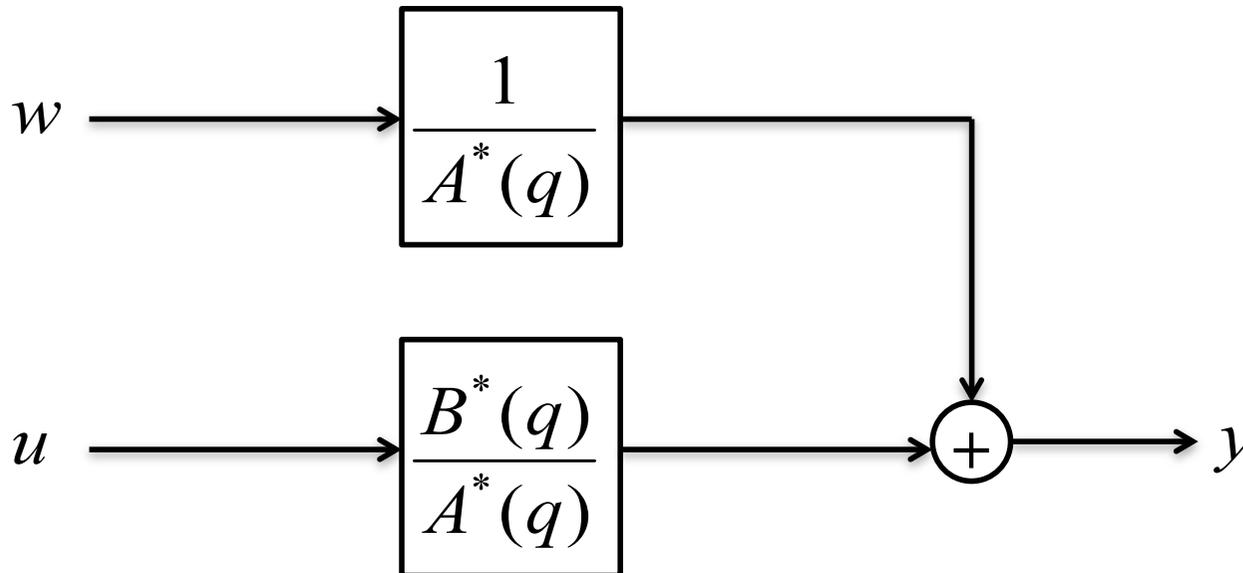
II.7 Modèles stochastiques (2)

Représentation polynomiale

$$A^*(q) = 1 + a_1^* q^{-1} + a_2^* q^{-2} + \dots + a_{n_a}^* q^{-n_a}$$

$$B^*(q) = b_1^* q^{-n_r} + b_2^* q^{-n_r-1} + \dots + b_{n_b}^* q^{-n_r-n_b+1}$$

$$A^*(q)y[k] = B^*(q)u[k] + w[k]$$



II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (3)

Modèle de prédiction

$$\theta = \left[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_b} \right]^T \quad \text{Estimée des paramètres}$$

$$\hat{y}[k, \theta] = -a_1 y[k-1] - \dots - a_{n_a} y[k-n_a] + b_1 u[k-n_r] + \dots + b_{n_b} u[k-n_r-n_b+1]$$

Prédiction de la sortie à l'instant k

$$e[k, \theta] = y[k] - \hat{y}[k, \theta] \quad \text{Erreur de prédiction (à 1 pas)}$$

$$= w[k] \quad \text{si} \quad \theta = \theta^*$$

$$\Rightarrow E\{e[k, \theta^*]\} = 0$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (4)

Forme polynomiale:

$$\hat{y}[k, \theta] = (1 - A(q))y[k] + B(q)u[k]$$

$$= \varphi^T [k - 1] \theta \quad \text{Modèle LRP}$$

$$\varphi^T [k - 1] = \left[-y[k - 1] \quad \dots \quad -y[k - n_a] \quad u[k - n_r] \quad \dots \quad u[k - n_r - n_b + 1] \right]$$

Vecteur régresseur

$$e[k, \theta] = y[k] - \hat{y}[k, \theta] = \varphi^T [k - 1] (\theta^* - \theta) + w[k]$$

NB: Prédiction à plusieurs pas

Prédiction à 2 pas:

$$\begin{aligned} \hat{y}^{(2)}[k, \theta] = & -a_1 \hat{y}^{(1)}[k - 1, \theta] - a_2 y[k - 2] \dots - a_{n_a} y[k - n_a] \\ & + b_1 u[k - n_r] + \dots + b_{n_b} u[k - n_r - n_b + 1] \end{aligned}$$

où $\hat{y}^{(1)}[k, \theta] =$ Prédiction à un pas à l'instant k-2 de la sortie à l'instant k-1

\Rightarrow Par extension : Prédiction à n pas

II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (5)

B. Modèle ARMAX (AutoRégressif à Moyenne Ajustée et variable eXogène)

$$y[k] + a_1^* y[k-1] + \dots + a_{n_a}^* y[k-n_a] = b_1^* u[k-n_r] + \dots + b_{n_b}^* u[k-n_r-n_b+1] \\ + w[k] + c_1^* w[k-1] + \dots + c_{n_c}^* w[k-n_c]$$

Bruit blanc de moyenne nulle



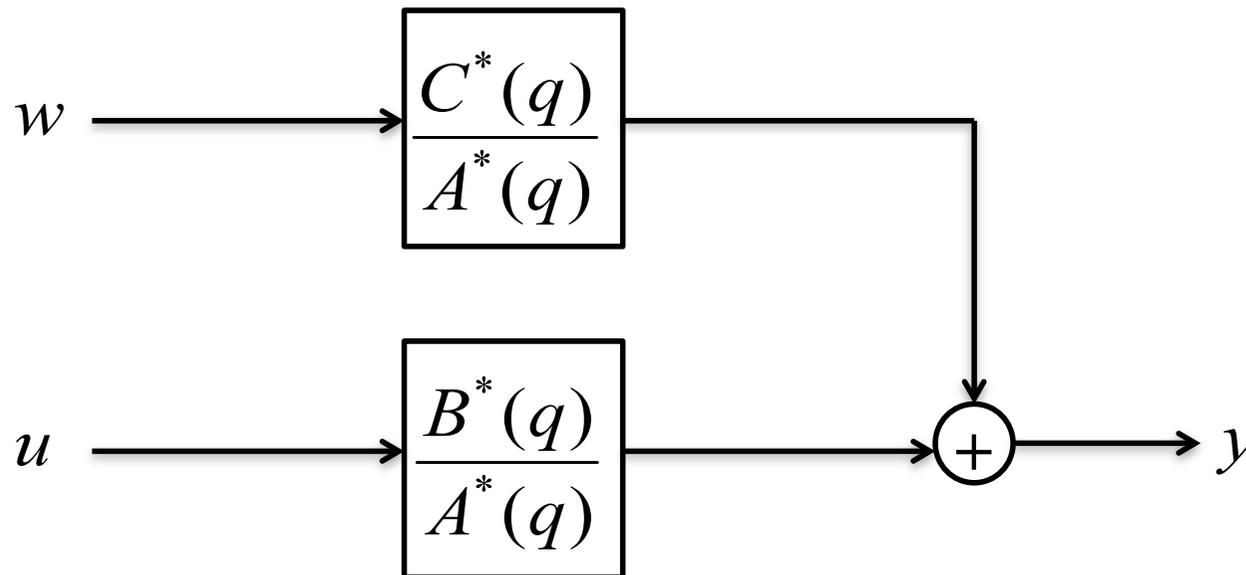
$$\theta^* = \left[a_1^* \quad \dots \quad a_{n_a}^* \quad b_1^* \quad \dots \quad b_{n_b}^* \quad c_1^* \quad \dots \quad c_{n_c}^* \right]^T$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (6)

$$C^*(q) = 1 + c_1^* q^{-1} + c_2^* q^{-2} + \dots + a_{n_c}^* q^{-n_c}$$

$$A^*(q)y[k] = B^*(q)u[k] + C^*(q)w[k]$$



II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (7)

Modèle de prédiction

$$y[k] = \left(1 - \frac{A^*(q)}{C^*(q)}\right) y[k] + \frac{B^*(q)}{C^*(q)} u[k] + w[k]$$

$$\hat{y}[k, \theta] = \frac{B(q)}{C(q)} u[k] + \left(\frac{C(q) - A(q)}{C(q)}\right) y[k]$$

Prédiction à un pas

Modèle non LRP

$$e[k, \theta] = y[k] - \hat{y}[k, \theta] = -\frac{B(q)}{C(q)} u[k] + \frac{A(q)}{C(q)} y[k] \quad \text{Erreur de prédiction}$$

$$= w[k] \quad \text{si} \quad \theta = \theta^*$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (8)

Formulation quasi-linéaire

$$\begin{aligned} C(q) \hat{y}[k, \theta] &= B(q)u[k] + (C(q) - A(q))y[k] \\ \hat{y}[k, \theta] &= (1 - A(q))y[k] + B(q)u[k] + \underbrace{(C(q) - 1)(y[k] - \hat{y}[k, \theta])}_{e[k, \theta]} \\ &= \varphi^T[k-1, \theta]\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^T[k-1, \theta] &= [-y[k-1] \quad \dots \quad -y[k-n_a] \quad u[k-n_r] \quad \dots \quad u[k-n_r-n_b+1] \\ &\quad e[k-1, \theta] \quad \dots \quad e[k-n_c, \theta]] \end{aligned}$$

$$y_m[k, \theta] = \hat{y}[k, \theta] = \varphi^T[k-1, \theta]\theta \quad \text{Modèle non LRP}$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (9)

C. Modèle ARIMAX (AutoRégressif avec Intégration à Moyenne Ajustée et variable eXogène)

$$A^*(q)\Delta y[k] = B^*(q)\Delta u[k] + C^*(q)w[k]$$

$$\Delta y[k] = y[k] - y[k-1] = (1 - q^{-1})y[k]$$

$$\Delta u[k] = u[k] - u[k-1] = (1 - q^{-1})u[k]$$

$$\Leftrightarrow A^*(q)y[k] = B^*(q)u[k] + \frac{C^*(q)}{(1 - q^{-1})}w[k]$$

Action intégrale 

II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (10)

D. Modèle ARARX et ARARMAX

Ajout d'un terme autorégressif sur le modèle de bruit

$$A^*(q)y[k] = B^*(q)u[k] + \frac{1}{D^*(q)}w[k] \quad \text{ARARX}$$

$$A^*(q)y[k] = B^*(q)u[k] + \frac{C^*(q)}{D^*(q)}w[k] \quad \text{ARARMAX}$$

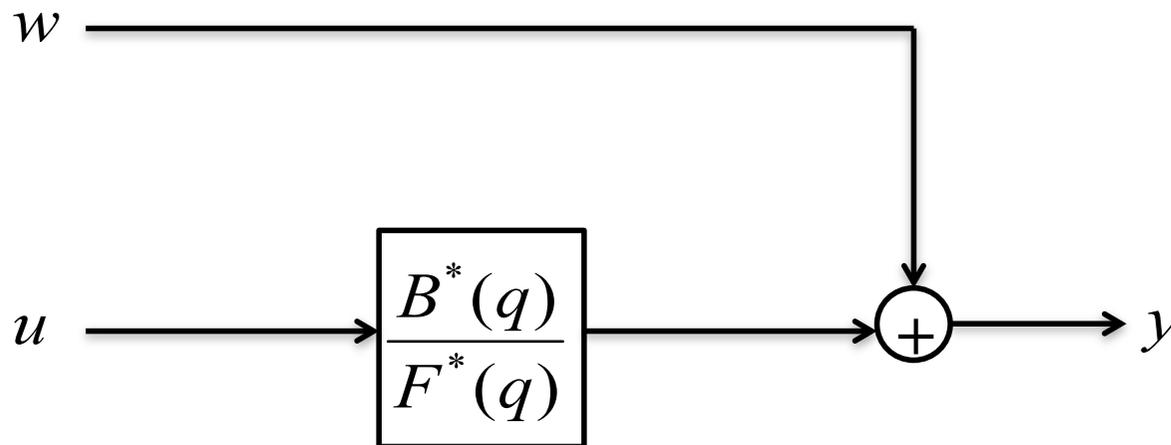
II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (11)

E. Modèle Erreur de sortie (« Output Error »)

$$y[k] = \frac{B^*(q)}{F^*(q)} u[k] + w[k]$$

$$F^*(q) = 1 + f_1^* q^{-1} + \dots + f_{n_f}^* q^{-n_f}$$



$$\theta^* = \left[b_1^* \quad \dots \quad b_{n_b}^* \quad f_1^* \quad \dots \quad f_{n_f}^* \right]^T$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (12)

Modèle de prédiction

$$\hat{y}[k, \theta] = \frac{B(q)}{F(q)} u[k] \quad \text{Modèle non LRP}$$

$$\begin{aligned} e[k, \theta] &= y[k] - \hat{y}[k, \theta] = y[k] - \frac{B(q)}{F(q)} u[k] \\ &= w[k] \quad \text{si } \theta = \theta^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}[k, \theta] &= -f_1 \hat{y}[k-1, \theta] - \dots - f_{n_f} \hat{y}[k-n_f, \theta] + b_1 u[k-n_r] \\ &\quad + \dots + b_{n_b} u[k-n_r-n_b+1] \end{aligned}$$

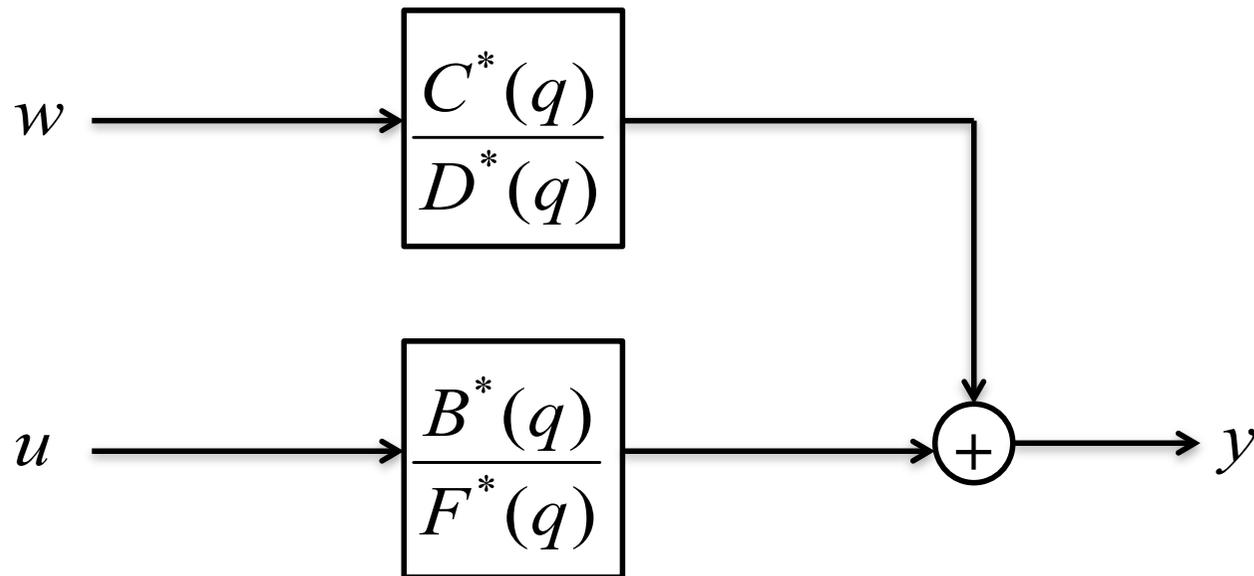
$$= \varphi^T[k-1, \theta] \theta \quad \text{Modèle pseudo-LRP de simulation}$$

II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (13)

F. Modèle de BOX et JENKINS

$$y[k] = \frac{B^*(q)}{F^*(q)} u[k] + \frac{C^*(q)}{D^*(q)} w[k]$$



II. STRUCTURE DE MODELES

II.7 Modèles stochastiques (14)

Modèle de prédiction

$$\hat{y}[k, \theta] = \frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)}u[k] + \left(1 - \frac{D(q)}{C(q)}\right)y[k]$$

$$\begin{aligned}e[k, \theta] &= y[k] - \hat{y}[k, \theta] \\ &= w[k] \quad \text{si } \theta = \theta^*\end{aligned}$$